BAB 1

SISTEM BILANGAN KOMPLEKS

Pokok Pembahasan :

Definisi

Bilangan Imajiner

Bilangan Kompleks

Operasi Aritmatik

BAB 1
SISTEM BILANGAN KOMPLEKS

1.1. DEFINISI

- Bilangan kompleks adalah bilangan yang besaran (skalarnya) tidak terukur secara menyeluruh.
- Bilangan kompleks terdiri dari 2 komponen :
  - Komponen bilangan nyata (riel) ; terukur
  - Komponen bilangan khayal (imajiner) ; tak terukur
- Bilangan kompleks merupakan fasor(vektor yang arahnya ditentukan oleh sudut fasa)

- Bilangan kompleks dapat diekspresikan dalam 4 bentuk :
  - Bentuk Rektangular
  - Bentuk Polar
  - Bentuk Trigonimetri
  - Bentuk Eksponensial
  - Bentuk Hiperbolik
  - Bentuk Logaritma

1.2. BILANGAN IMAJINER

- Bilangan bertanda positip di bawah tanda akar disebut bilangan irasional.

  Contoh **:** $\sqrt{3}$ **,** $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, dst

- Bilangan (positip atau negatip) bila dikuadratkan hasilnya akan selalu positip.

  Contoh **:** $(3)^2 = 9$; $(-4)^2 = 16$; $(-5)^2 = 25$ dst.

- Bilangan bertanda negatif di bawah tanda akar disebut **bilangan imjiner**.

  Contoh : $\sqrt{(-6)}$; $\sqrt{(-9)}$; $\sqrt{(-12)}$; $\sqrt{(-16)}$ dst

- Bilangan imajiner

$$\sqrt{(-9)} = [\sqrt{(-1)}]\ \sqrt{(9)} = [\sqrt{(-1)}]\ 3$$
$$\sqrt{(-5)} = [\sqrt{(-1)}]\ \sqrt{(5)} = [\sqrt{(-1)}]\ 2.2361$$

Bila $\sqrt{(-1)} = i$ atau $\sqrt{(-1)} = j$

maka $\sqrt{(-9)} = = i3$ atau $\sqrt{(-9)} = j3$

- i atau j disebut **operator**

► Sehingga $i^2 = [\sqrt{(-1)}].[\sqrt{(-1)}] = -1$

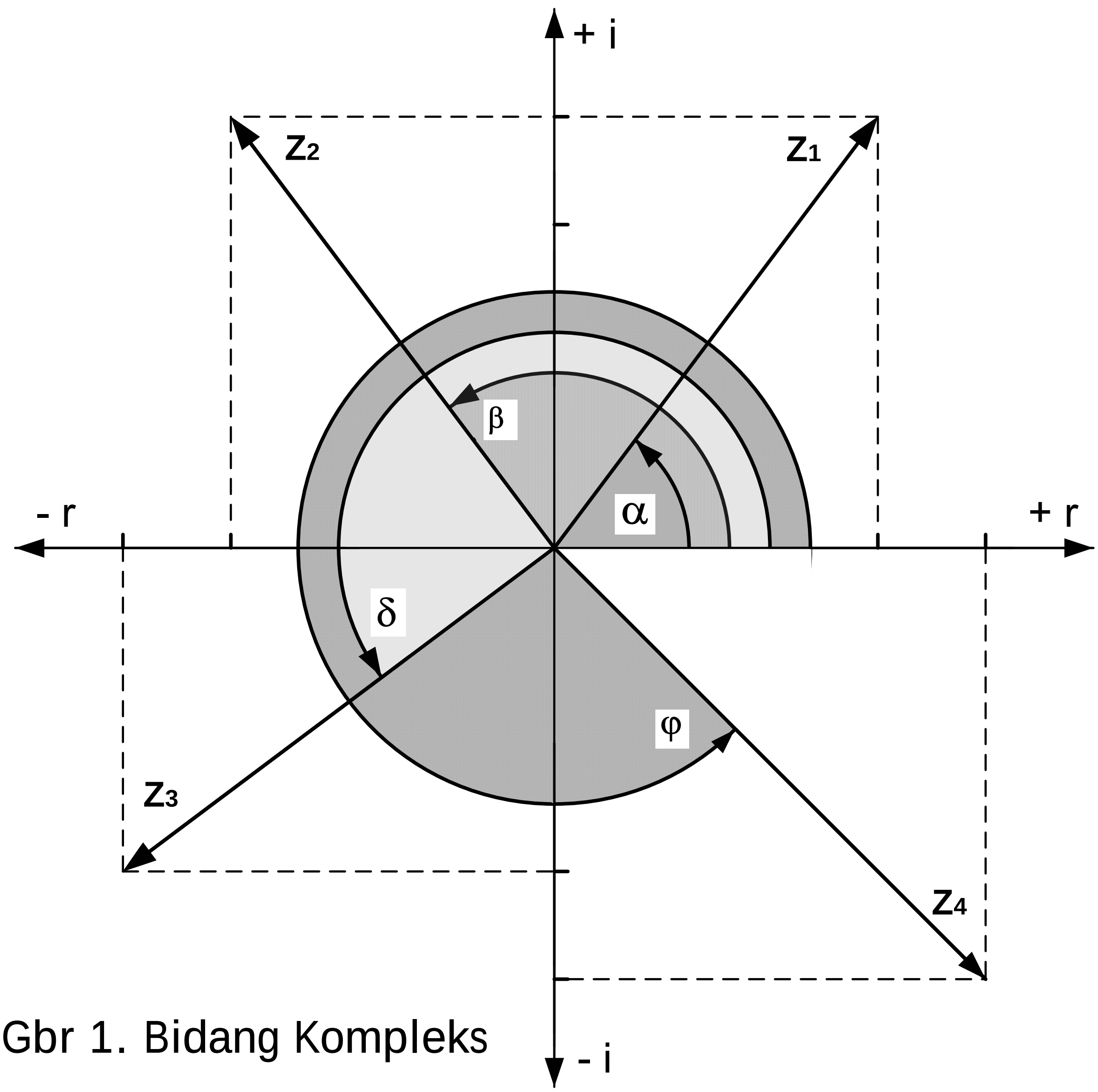
$i^3 = (i^2).\ i = [\sqrt{(-1)}]^2 .\ i = -i$

$i^4 = (i^2)^{\ 2} = (-1)^2 = 1$

$i^5 = (i^4)\ .\ i = i$

1.3. BILANGAN KOMPLEKS

1.3.1. Bentuk Rektangular



Gbr 1. Bidang Kompleks

► Bentuk Umum

$$Z = R + iX \qquad (1\text{-}1)$$

R = Re(Z) = Komponen Bilangan Riel (Nyata)
X = Im(Z) = Komponen Bilangan Khayal (Imajiner)

► Contoh :

1. $Z_1 = 3 + i4$; $Re(Z_1) = 3$; $Im(Z_1) = 4$
2. $Z_2 = -3 + i4$; $Re(Z_2) = -3$; $Im(Z_2) = 4$
3. $Z_3 = -4 - i3$; $Re(Z_3) = -4$; $Im(Z_3) = -3$
4. $Z_4 = 4 - i4$; $Re(Z_4) = 4$; $Im(Z_4) = -4$

► Harga besaran (skalar) Z :

$$\check{Z} = |Z| = \sqrt{(R^2 + X^2)} \qquad (1\text{-}2)$$

$\check{Z}$ disebut harga mutlak (absolut) atau disebut juga **modulus** Z, ditulis |Z|.

► Sudut arah diukur terhadap sumbu X positif dan disebut sebagai argumen Z.

$$\text{Arg } Z = \theta = \text{Arc tan } (X/R)$$
$$= \text{Arc sin } (R/Z) \qquad (1\text{-}3)$$
$$= \text{Arc cos } (X/Z)$$

Contoh :

1. $Z_1 = 3 + i4$
2. $Z_2 = -3 + i4$
3. $Z_3 = -4 – i3$
4. $Z_4 = 4 – i4$

1.3.2. Bentuk Polar

► Lihat persamaan-persamaan :

(1-1) : $Z = R + iX$

(1-2) : $\check{Z} = |Z| = \sqrt{(R^2 + X^2)}$

(1-3) : Arg Z = θ

θ = Arc tan (X/R)

θ = Arc sin (R/Z)

θ = Arc cos (X/Z)

► Bentuk Umum Bilangan Kompleks dalam bentuk Polar :

$$Z = \check{Z} \angle \theta \qquad (1\text{-}4)$$

► Contoh :

1. $Z_1 = 3 + i4$; $\check{Z}_1 = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$

   $\alpha = \text{Arc tan } (4/3) = 53.13^o$

   $Z_1 = 5 \angle 53.13^o$

2. $Z_2 = -3 + i4$; $\check{Z}_2 = \sqrt{[(-3)^2 + 4^2]} = 5$

   $\beta = \text{Arc tan } (4/-3) = -53.13^o = 126.87^o$

   $Z_2 = 5 \angle -53.13^o$; $Z_2 = 5 \angle 126.87^o$

3. $Z_3 = -4 - i3$; $\check{Z}_3 = \sqrt{[(-4)^2 + (-3)^2]} = 5$

   $\delta = \text{Arc tan } (-3/-4) = 216.87^o$

   $Z_3 = 5 \angle 216.87^o$

4. $Z_4 = 4 - i4$; $\check{Z}_4 = \sqrt{(4^2 + (-4)^2)} = 5.66$

   $\varphi = \text{Arc tan } (4/-4) = -45^o = 315^o$

   $Z_4 = 5 \angle -45^o$; $Z_4 = 5 \angle 315^o$

5. $Z_5 = -i4$; $\check{Z}_5 = \sqrt{(-7^2)} = 7$

   $\theta = \text{Arc tan } (-7/0) = -90^o = 270^o$

   $Z_5 = 7\angle -90^o$; $Z_5 = 7\angle 270^o$

6. $Z_6 = 9$; $\check{Z}_6 = \sqrt{(9^2)} = 9$

   $\theta = \text{Arc tan } (0/9) = 0^o$

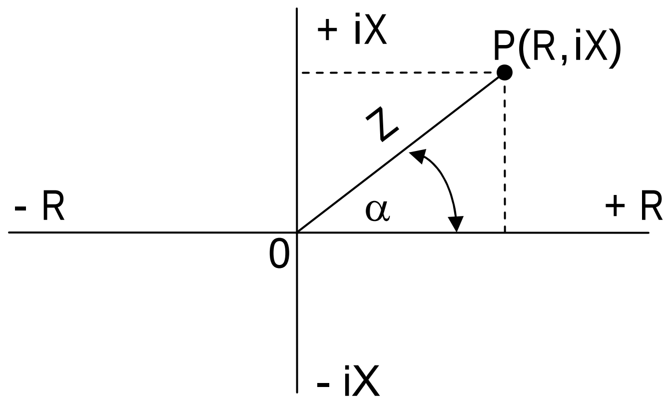
   $Z_6 = 9\angle 0^o$

► **Catatan** :

$i = 90^o$; $i^2 = 180^o = -90^o$; $i^3 = 270 = -90^o$

$i^4 = 1 = 360^o = 0^o$; $i^n = n \times 90^o$

1.3.3. Bentuk Trigonometri



Gbr 2. Bidang compels utk bentuk trigonometri

Bila $Z = R + iX$ (lihat pers 1-1), maka :

$$R = ž \cos \alpha \quad \text{dan} \quad X = ž \sin \alpha$$

Sehingga : $Z = ž \cos \alpha + i\, ž \sin \alpha$

$$Z = Ž\,(\cos \theta + i \sin \theta) \qquad (1\text{-}5)$$

► Contoh

1. $Z_1 = 3 + i4$; $Ž_1 = 5$; $\alpha = 53.13^o$
   $Z_1 = 5 \angle 53.13^o$
   $Z_1 = 5\,(\cos 53.13^o + i \sin 53.13^o)$

2. $Z_2 = -3 + i4$; $\check{Z}_2 = 5$; $\beta = -53.13^o = 126.87^o$

$Z_2 = 5 \angle -53.13^o$; $Z_2 = 5 \angle 126.87^o$

$Z_2 = 5 (\cos -53.13^o + i \sin -53.13^o)$

$\mathbf{Z_2 = 5 (\cos 128.87^o + i \sin 128.87^o)}$

3. $Z_3 = -4 - i3$; $\check{Z}_3 = 5$; $\delta = 216.87^o$

$Z_3 = 5 \angle 216.87^o$

$\mathbf{Z_3 = 5 (\cos 216.87^o + i \sin 216.87^o)}$

4. $Z_4 = 4 - i4$; $\check{Z}_4 = 5.66$; $\varphi = -45^o = 315^o$

$Z_4 = 5.66 \angle -45^o$

$\mathbf{Z_4 = 5.66 (\cos -45^o - i \sin -45^o)}$

1.3.4. Bentuk Eksponensial

Bentuk fungsi eksponensial sejati :

$$(e^x)^1 = e^x$$

$$e^{(x1+x2)} = e^{x1}.e^{x2}$$

dan bila $e^{(x + i R)} = e^x.e^{iR}$

Menurut Deret MacLaurin :

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \ldots\ldots\ldots \qquad (1\text{-}6)$$

bila Z = R + iX dapat dituliskan dalam bentuk :

$$e^{Z} = e^{R} (\cos X + i \sin X) \qquad (1\text{-}7)$$

- Didefinisikan sebagai fungsi positif

Menurut Rumus Euler (perhatikan pers. 1-7) :

$$e^{iX} = \cos x + i \sin x \qquad (1\text{-}8)$$

- Didefinisikan sebagai fungsi imajiner

Sehingga bentuk bilangan kompleks :

$Z = R + i X = Ž (\cos \theta + i \sin \theta)$

$$Z = Ž\, e^{i\theta} \qquad (1\text{-}9)$$

Karena $| e^{iX} | = \sqrt{(\cos^{2} X + \sin^{2} X)} = 1$

► Contoh

1. $Z_1 = 3 + i4$; $\check{Z}_1 = 5$; $\alpha = 53.13^o$

   $Z_1 = 5 \angle 53.13^o$

   $Z_1 = 5 (\cos 53.13^o + i \sin 53.13^o)$

   $Z_1 = 5 e^{i\, 53.13o}$

2. $Z_2 = -3 + i4$; $\check{Z}_2 = 5$; $\beta = -53.13^o$

   $Z_2 = 5 \angle -53.13^o$

   $Z_2 = [5 (\cos -53.13^o + i \sin -53.13^o)]$

   $\mathbf{Z_2 = 5}\, e^{i\, -53.13o}$

3. $Z_3 = -4 - i3$; $\check{Z}_3 = 5$;

   $\delta = 36.87^o$ (kuadran 3) ; $\delta = 216.87^o$

   $Z_3 = 5 \angle 216.87^o$

   $\mathbf{Z_3 =} 5 (\cos 216.87^o + i \sin 216.87^o)$

   $\mathbf{Z_3 = 5}\, e^{i\, 216.87o}$

4. $Z_4 = 4 - i4$; $\check{Z}_4 = 5.66$; $\varphi = -45^o = 315^o$

   $Z_4 = 5 \angle -45^o$; $Z_4 = 5 \angle 315^o$

   $\mathbf{Z_4 = 5 (\cos 315^o + i \sin 315^o}$

   $\mathbf{Z_4 = 5}\, e^{i\, 315o}$

1.3.5. Fungsi Hiperbolik

Bila $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

dan $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

maka didapatkan :

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \qquad (1\text{-}10)$$

dan

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Sedangkan secara kalkulus:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos -\theta = \cos\theta \qquad \sin -\theta = -\sin\theta$$

$$\cot -\theta = -\cos\theta \qquad \tan -\theta = -\tan\theta$$

$$\cos(\theta \pm 2n\pi) = \cos\theta \qquad \sin(\theta \pm 2n\pi) = \sin\theta$$

$$\tan(\theta \pm n\pi) = \tan\theta \qquad \cot(\theta \pm n\pi) = \cot\theta$$

$n = 0,1,2,3\ldots\ldots\ldots$

$\cos(Z_1 \pm Z_2) = \cos Z_1 \cos Z_2 \mp \sin Z_1 \sin Z_2$

$\sin(Z_1 \pm Z_2) = \sin Z_1 \cos Z_2 \pm \cos Z_1 \sin Z_2$

Menurut Euler : $e^{iZ} = \cos Z + i \sin Z$

Sehingga didapatkan :

$\cos(R + iX) = \cos R \cos iX - \sin R \sin iX$
$\sin(R + iX) = \sin R \cos iX - \cos R \sin iX$

Sedangkan menurut definisi hiperbolikus :

$$\cos i\theta = \frac{1}{2}(e^{-\theta} + e^{\theta}) = \cosh\theta$$

$$\sin i\theta = \frac{1}{2i}(e^{-\theta} - e^{\theta}) = i\sinh\theta$$

Sehingga diperoleh bentuk hiperbolikus bilangan kompleks :

$$\cos(R + iX) = \cos R \cosh X - i \sin R \sinh X$$

(1-11)

$$\sin(R + iX) = \sin R \cosh X + I \cos R \sinh X$$

Bentuk Umum fungsi hiperbolikus bilangan kompleks adalah :

$\cosh Z = \cos (iZ)$; $\sinh Z = -i \sin(iZ)$ (1-12)

$$\tanh Z = \frac{\sinh Z}{\cosh Z} \quad ; \quad \coth \theta = \frac{\cosh \theta}{\sinh \theta} \qquad (1\text{-}13)$$

$$\operatorname{sech} Z = \frac{1}{\cosh Z} \quad ; \quad \operatorname{csch} Z = \frac{1}{\sinh Z} \qquad (1\text{-}14)$$

1.3.6. Bentuk Logaritma

Bila $Z = R + iX$ dilogaritmakan biasa diubah menjadi ln Z atau log Z.

- Logaritma merupakan inverse dari bentuk eksponensial

- Bila didefinisikan $w = \ln Z$, maka :

$$e^{w} = Z \qquad (1\text{-}15)$$

dengan $Z \neq 0$

Misalkan ditentukan $w = u + i\,v$ dan $Z = |Z|\,e^{i\theta}$ maka :

$$e^{w} = e^{(u+iv)} = e^{u}\,e^{iv} = Z\,e^{i\theta}$$

$e^{u}\,e^{iv}$ = memiliki harga absolute bila v adalah real, sedangkan $|e^{iv}| = 1$, sehingga :

$$e^{u} = |Z| \quad \text{atau} \quad u = \ln|Z|$$

dan $v = \theta = \arg Z$

Karena itu

$$\ln Z = \ln|Z| + i\arg Z = \ln\sqrt{(R2+X2)} + i\arg(R+iX) \qquad (1\text{-}16)$$

Bila Z merupakan perkalian 2π , maka :

$$\pi < \arg Z < \pi$$

Disebut nilai prinsipal (*principal value*).

Maka nilai ln Z dalam bentuk lain adalah :

- Untuk nilai Z real positif :

$$\ln z = \text{Ln}\,Z + 2n\pi I$$

$n = 1,2,3$................ (1-17)

- Untuk nilai Z real negatif :

$$\text{Ln}\,z = \ln|Z| + \pi i$$

1.4. OPERASI ARITMATIK

1.4.1. Penjumlahan/Pengurangan

► Bentuk Umum

$$\Sigma Z_i = \Sigma \operatorname{Re}(Z_i) \pm i.\Sigma \operatorname{Im}(Z_i) \qquad (1\text{-}18)$$

► Bila $Z_1 = a + ib$; $Z_2 = m + in$ dan $Z = X \pm Y$

maka $Z = Z_1 \pm Z_2 = (a + ib) \pm (m + in)$

$= (a + m) \pm i(b + n)$

► Contoh

1. $Z_1 + Z_2$ bila $Z_1 = 4 + i6$; $Z_2 = -8 - i3$

Jawab :

$Z_3 = Z_1 + Z_2 = (4 + i6)+(-8 -i3) = (4-8) + i(6-3)$

$= -4 + i3 = 5 \angle 143.13^o = 5 \angle -36.87^o$

$= 5 (\cos 143.13^o + i \sin 143.13^o)$

$= 5 [\cos (-36.87 \} + i \sin(-36.87)]$

$= 5\, e^{i143.13o} = 5\, e^{i-36.87o}$

Cara lain

$Z_1 = 4 + i6$

$Z_2 = -8 - i3$

________________ +

$Z_3 = Z_1 + Z_2 = -4 + i3$

2. Hitung $Z_1 + Z_2$, bila $Z_1 = 6.403e^{i38.66o}$ dan $Z_2 = 6.708e^{i-63.43o}$

Jawab :

$Z_1 = 6.403e^{i38.66o} = 6.403 \angle 38.66^o$

$Z_1 = 6.403 (\cos 38.66^o + i \sin 38.66^o)$

$Z_1 = 5 + i4$

$Z_2 = 6.708 \, e^{i-63.43o} = 6.708 \angle -63.43^o$

$Z_2 = 6.708 (\cos -63.43^o + i \sin -63.43^o)$

$Z_2 = 3 – i6$

$Z_1 + Z_2 = (5+3) + i(4-6) = 8 – i2$

Catatan

Operasi penjumlahan/pengurangan bilangan kompleks lebih mudah bila persamaan dalam bentuk **rektangular.**

1.4.2. Perkalian

A. Perkalian Bentuk Rektangular

$$X = a + ib \qquad Y = p + iq$$

$$X.Y = (a+ib)(p+iq) = ap + iaq + ibp - bq$$

$$X.Y = (ap-bq) + i(aq+bp)$$

B. Perkalian Bentuk Polar

$$X = \hat{X} \angle \beta \qquad ; Y = \hat{Y} \angle \varphi$$

$$X.Y = (\hat{X}.\hat{Y}) \angle (\beta + \varphi)$$

C. Perkalian Bentuk Eksponensial

$$X = \hat{X} e^{i\beta} \qquad ; \qquad Y = \hat{Y} e^{i\varphi}$$

$$X.Y = (\hat{X} \; \hat{Y}) e^{i(\beta + \varphi)}$$

D. Perkalian Bentuk Trigonometri

$$X = \hat{X}\ (\cos\ \beta + i \sin\ \beta)$$
$$Y = \hat{Y}\ (\cos\ \varphi + i \sin \varphi)$$

$$X.Y = [\ \hat{X} (\cos \beta + i \sin \beta)]\ [\hat{Y} (\cos \varphi + i \sin \varphi)]$$

Contoh

1. Hitung Z_1 x Z_2
   bila $Z_1 = 5 + i4$; $Z_2 = 3 - i6$
   Jawab
   $Z_1 \times Z_2 = (5 + i4)(3 - i6)$
   $= (5.3 + 3.\ i4 - 5.\ i6 + i4\ .\ -i6)$
   $= (15 + 24) + i(12-30) = 39 - i18$

2. Hitung Z_1 x Z_2 , bila
   $Z_1 = 6.403 (\cos 38.66^o + i \sin 38.66^o)$
   $Z_2 = 6.708 (\cos -63.43^o + i \sin -63.43^o)$
   Jawab :
   $Z_1 = 6.403e^{i38.66o}$ $= 6.403 \angle 38.66^o$
   $Z_2 = 6.708\ e^{i-63.43o}$ $= 6.708 \angle -63.43^o$

$Z_1 \times Z_2 = 6.403e^{i38.66o}\ \ 6.708\ e^{i-63.43o}$

$= (6.403 \times 6.708)\ \mathbf{e}^{i(38.66-63.43)}$

$= 42.953\ \mathbf{e}^{i(-24.78)}$ atau

$= 42.953\ (\cos -24.78^o + i \sin 24.78^o)$

$Z_1 \times Z_2 = 39 - i18 \quad ; \theta = -24.78^o$

$Z_1 \times Z_2 = (6.403)(6.708) \angle (38.66^o - 63.43^o)$

$= 42.953 \angle -24.78^o$

$= 42.953\ (\cos -24.78^o + i \sin -24.78^o)$

$= 39 - i18$

Catatan :

Operasi perkalian lebih mudah dilakukan dalam bentuk polar atau eksponensial.

1.4.3. Pembagian

A. Pembagian Bentuk Rektangular

$X = a + ib \qquad Y = p + iq$

$X/Y = (a+ib)/(p+iq)$

$X/Y = [(a+ib)/(p+iq]\ [(p-iq)/(p-iq)]$

$= [(a+ib)(p-iq)]/[(p+iq)(p-iq)]$

$= [(a+ib)(p-iq)]/\ (p^2+q^2)$

$$X/Y = [(ap-bq)+i(bp-aq)]/(p^2+q^2)$$

B. Pembagian Bentuk Polar dan Eksponensial

$Z_1 = \check{Z}_1 \angle \beta$ dan $Z_2 = \check{Z}_2 \angle \varphi$

$$Z_1/Z_2 = (\check{Z}_1/\check{Z}_2) \angle (\beta - \varphi)$$

$Z_1 = \check{Z}_1 e^{i\beta}$ dan $Z_2 = \check{Z}_2 e^{i\varphi}$

$$Z_1/Z_2 = (\check{Z}_1/\check{Z}_2)\, e^{i(\beta-\varphi)}$$

Contoh

1. Hitung Z_1/Z_2 bila $Z_1 = 5 + i4$; $Z_2 = 3 - i6$

   Jawab :

   $Z_1/Z_2 = (5+i4)/(3-i6)$

   $= [(5+i4)/(3-i6)][(3+i6)/(3+i6)]$

   $= [(5+i4)(3+i6)]/(3^2+6^2)$

   $= [(15-24)+i(12+24)]/(9+36)$

   $= -0.2 + i0.933$

2. Hitung Z_1/Z_2 bila

Polar $Z_1 = 6.403 \angle 38,66^o$ dan

$Z_2 = 6.708 \angle -63.43^o$

Eksponensial $Z_1 = 6.403\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}38,66o}$

$Z_2 = 6.708\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}-63.43o}$

Jawab :

$Z_1/Z_2 = (6.403/6.708)\angle[38,66^o-(-63.43^o)]$

$Z_1/Z_2 = (0.955)\ \angle 102.10^o$

$Z_1/Z_2 = (6.403/6.708)\mathbf{e}^{\mathbf{i[38,66o- (-63.43o)]}}$

$Z_1/Z_2 = (0.955)\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}102.10o}$

Catatan :

Operasi pembagian lebih mudah bila dilakukan dalam bentuk polar atau eksponensial.

1.4.4. Sifat Utama Dalam Operasi Aritmatik

1. Komutatif

$Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$

$Z_1.Z_2 = Z_2.Z_1$

2. Asosiatif

$(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$

$(Z_1 . Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 . Z_3)$

3. Distributif

$Z_1 (Z_2 + Z_3) = Z_1Z_2 + Z_1Z_3$

$0 + Z = Z + 0 = Z$

$Z+(-Z) = (-Z) + Z = 0$

$Z.1 = Z$

1.5. KONJUGASI

1.5.1. Pengertian Dasar

► Konjugasi adalah bayangan cermin bilangan nyata (riel) dalam sistem bilanganh kompleks.

► Tanda pada komponen imajiner berubah (berlawanan).

► Konjugasi dituliskan dengan tanda " ***** "

Cara Penulisan

Bentuk	Konjugasi
1. Rektanguler	
$Z = R + iX$	$Z^* = R - iX$
2. Polar	
$Z = \check{Z} \angle \beta$	$Z^* = \check{Z} \angle -\beta$
3. Trigonometri	
$Z = \check{Z}(\cos \beta + i \sin \beta)$	$Z^* = \check{Z}(\cos \beta - i \sin \beta)$
4. Eksponensial	
$Z = \check{Z}\, e^{i\beta}$	$Z^* = \check{Z}\, e^{-i\beta}$

1.5.2. Sifat-sifat Utama Konjugasi

- $(Z^*)^* = Z$
- $(Z_1 + Z_2)^* = Z_1^* + Z_2^*$
- $(Z_1 . Z_2)^* = Z_1^* . Z_2^*$
- $(Z_1 / Z_2)^* = Z_1^* / Z_2^*$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. $(R + iX)^4 + (R - iX)^4$
2. $(1-i\sqrt{3})^5 + ((-3 + i3)^4$
3. $5(\cos 12^o + i \sin 12^o) + 4(\cos 78^o + i \sin 78^o)$
4. $12(\cos 138^o + i \sin 138^o) - 6(\cos 93^o + i \sin 93^o)$
5. $3(\cos 38^o + i \sin 38^o) \times 4(\cos 82^o - i \sin 82^o)$
6. $4(\cos 69^o - i \sin 69^o) \times 5(\cos 35^o + i \sin 35^o)$
7. $12(\cos 138^o + i \sin 138^o) / 4(\cos 69^o - i \sin 69^o)$
8. $6(\cos 93^o - i \sin 93^o) / 3(\cos 38^o + i \sin 38^o)$
9. Bila $Z_1 = 12(\cos 125 + i \sin 125)$; $Z_2 = (3 - i\sqrt{5})^3$

   Hitung :

   a. $Z_1^* + Z_1 Z_2^*$, b. $2Z_1^* \times Z_2^*$, c. $Z_1^* \times (Z_2^*)^2$
10. Soal sama dengan No. 9, tetapi

    Hitung :

    a. Z_1^* / Z_2^* , b. $2Z_1^* / Z_2^*$, c. $(Z_2^*)^2 / 2Z_1^*$
11. Carilah solusi kompleks dari fungsi-fungsi berikut :

    a. $\cos z = 5$, b. $\sin Z = 1000$, c. $\cosh Z = 0$

    d. $\sinh Z = 0$, e. $\cosh Z = 0.5$, f. $\sin Z = i \sinh 1$