Representasi sinyal dalam impuls

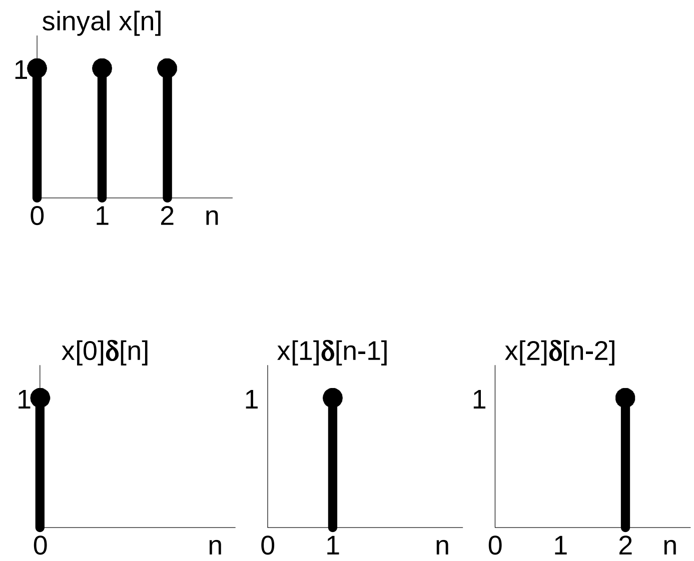
Representasi sinyal dalam impuls adalah sinyal yang dinyatakan sebagai fungsi dari impuls atau sebagai kumpulan dari impuls-impuls. Sembarang sinyal diskret dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari impuls-impuls diskret dan sembarang sinyal kontinyu dapat dinyatakan sebagai integral impuls.

Pada Gambar 3.1(a), terlihat sinyal x[n] terdiri atas 3 impuls. Gambar 3.1(b) adalah impuls-impuls penyusun x[n]. Impuls-impuls penyusun dapat diperoleh dengan mengalikan sinyal x[n] dengan impuls satuan yang digeser. Sinyal impuls x[0]δ[n] diperoleh dengan mengalikan x[n] dengan δ[n]. Sinyal impuls x[1]δ[n-1] diperoleh dengan mengalikan x[n] dengan δ[n-1]. Dan akhirnya tampak jelas bahwa:

$$x[n] = x[0]\,\delta[n] + x[1]\,\delta[n-1] + x[2]\,\delta[n-2]$$

(a)

(b)



Gambar 3.1 Sinyal x(n) dan Sinyal Penyusunnya

Secara umum, sebuah sinyal diskret sembarang x[n] dapat dinyatakan sebagai penjumlahan impuls-impuls:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

Seperti pada sistem diskret, sebuah sinyal kontinyu sembarang dapat dinyatakan sebagai integral dari impuls-impuls:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Respon Impuls

Keluaran sebuah sistem disebut juga respon. Jika sinyal berupa *unit impulse* masuk ke dalam sistem, maka sistem akan memberi respon yang disebut respon impuls (*impulse response*). Respon impuls biasa diberi simbol h. Jika sistemnya diskrit, respon impulsnya diberi simbol h[n] dan jika sistemnya kontinyu, respon impulsnya diberi simbol h(t).

Respon Sistem LTI

Sistem LTI (Linier Time Invariant) adalah sistem yang memenuhi sifat superposisi sekaligus time-invariant seperti telah dibahas pada bab sebelumnya. Sistem LTI dikarakterisasi oleh respon impulsnya artinya respon dapat dihasilkan jika masukannya adalah unit impuls. Hal ini berarti jika kita mengetahui respon impuls sistem maka kita dapat mengetahui respon sistem untuk berbagai macam jenis masukan. Misalkan h[n] adalah respon impuls sistem LTI. Karena sistem ini mengikuti prinsip time invariant maka berlaku hubungan seperti ditunjukkan pada Tabel 3.1

Tabel 3.1 Respon Impuls Sistem LTI

Masukan	Keluaran
δ[n]	h[n]
δ[n-1]	h[n-1]
δ[n-2]	h[n-2]
δ[n-k]	h[n-k]

Pada sitem LTI juga berlaku prinsip superposisi sehingga jika masukannya

$$\sum_{i=M}^{N} x_i[n]$$

maka keluarannya adalah

$$\sum_{i=M}^{N} y_i[n]$$

dengan $M \leq N$ dan y_i adalah respon/keluaran yang berkaitan dengan masukan x_i.

Sebagai contoh jika x[n]= 2δ[n+1]+ 3δ[n]+ 1δ[n-1]+ 4δ[n-2] maka keluarannya adalah y[n]= 2h[n+1]+ 3h[n]+ 1h[n-1]+ 4h[n-2]. Sehingga secara umum, jika masukan sistem LTI yang dinyatakan sebagai:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

maka keluarannya adalah

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\mathrm{h}[n-k]$$

Persamaan di atas disebut sebagai penjumlahan konvolusi dari x[n] dan h[n] yang dapat dinotasikan sebagai:

$$y[n] = x[n] \otimes \mathrm{h}[n]$$

Konvolusi

Konvolusi adalah metode penghitungan untuk menentukan respon sistem. Pada sistem diskrit metode penghitungan dengan cara penjumlahan (akumulator) sedangkan pada sistem kontinyu dengan cara integrasi. Jika h[n] adalah respon impuls sistem linier diskret, dan x[n] adalah sinyal masukan maka sinyal keluaran adalah

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \end{aligned}$$

Rumusan di atas disebut penjumlahan konvolusi.

Jika h(t) adalah respon impuls sistem linier kontinyu, dan x(t) adalah sinyal masukan maka sinyal keluaran adalah

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Rumusan di atas disebut integral konvolusi.

Operasi konvolusi mempunyai beberapa sifat operasional:

1. Komutatif : x * h = h * x
2. Asosiatif : (x * g) * h = x * (g * h)
3. Distributif: x * (h1 + h2) = x * h1 + x * h2

Konvolusi dilakukan berdasarkan respon impuls sistem yang menyatakan karakterisasi dari sistem tersebut. Secara matematis, respon impuls sistem dihitung menggunakan fungsi delta. Misalnya kita mendapatkan y[n] = 2x[n] + 4x[n-2]. Untuk mendapatkan respon impuls sistem, sistem tersebut diubah dengan mengganti x[n] dengan

$\delta[n]$ dan y[n] dengan h[n], sehingga persamaan menjadi $h[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n-2]$ dan h[n] dapat diselesaikan dengan mudah.

Konvolusi dengan Metode Respon Penjumlahan dari dekomposisi sinyal x[n]

Jika respon impuls sebuah sistem linier diketahui, maka respon sistem terhadap sembarang bentuk sinyal dapat dihitung. Sebagai contoh kasus $x[n]= \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 1$ dan $h[n]=\underset{\uparrow}{1}\ 0\ 1$, maka dekomposisi sinyal masukan adalah

$$x[n]= x[0]\delta[n]+ x[1]\delta[n-1]+ x[2]\delta[n-2]$$

$$= 1\delta[n]+ 1\delta[n-1]+ 1\delta[n-2]$$

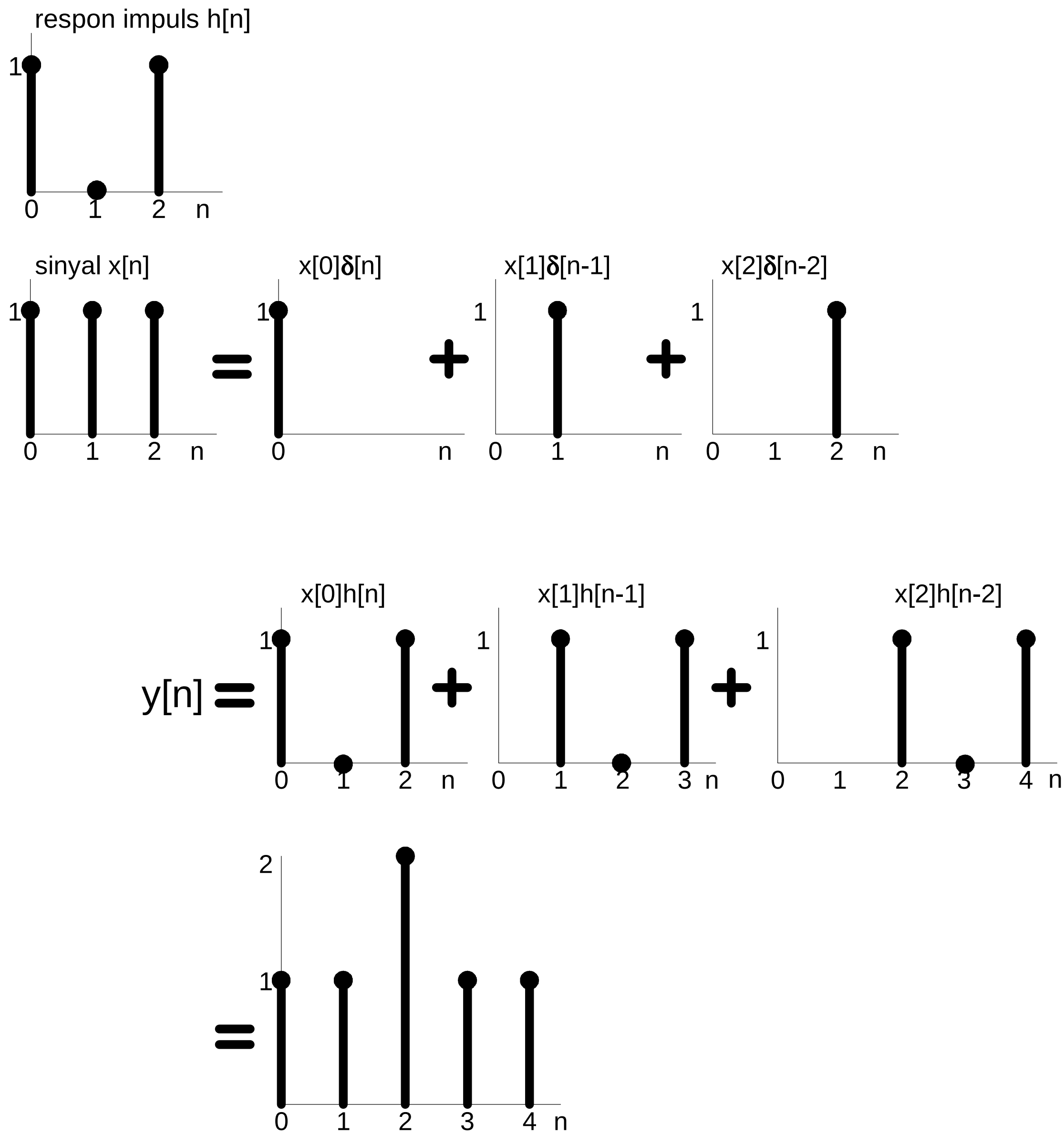
sesuai rumus pada persamaan (   ) dapat ditentukan respon sistem y[n] yaitu

$$y[n]=1h[n]+ 1h[n-1]+ 1h[n-2]$$

$$=\underset{\uparrow}{1}\ 0\ 1 + \underset{\uparrow}{0}\ 1\ 0\ 1 + \underset{\uparrow}{0}\ 0\ 1\ 0\ 1$$

$$=\underset{\uparrow}{1}\ 1\ 2\ 1\ 1$$

Gambar 3.2 memperlihatkan bagaimana respon sistem dihitung terhadap masukan x[n]= 1 1 1 dan respon impuls h[n]=1 0 1



Gambar 3.2 Respon Sistem y[n]

Pada Gambar 3.2 memperlihatkan penghitungan respon sistem terhadap masukan sinyal sembarang x[n], sinyal x[n] diurai menjadi sinyal-sinyal penyusunnya. Setiap sinyal penyusun kemudian dicari responnya. Respon sistem diperoleh dengan menjumlahkan seluruh respon terhadap sinyal penyusun. Dengan kata lain, Sinyal x[n] diurai menjadi sinyal-sinyal x[0] δ[n], x[1] δ[n-1], x[2] δ[n-2] dan seterusnya. Setiap sinyal penyusun akan menghasilkan respon yang mirip dengan respon impuls, tapi berbeda pada letak dan nilai besarnya. Bentuk sinyal x[0] δ[n] sama dengan impuls satuan dikali satu, maka responnya sama dengan respon impuls dikali satu atau x[0]h[n]. Bentuk sinyal x[1] δ[n-1] sama dengan impuls satuan digeser satu ke kanan dan dikali satu, maka responnya sama dengan respon impuls digeser satu ke kanan dan dikali satu atau x[1]h[n-1] dan seterusnya. Karena sinyal x[n] dapat disusun dari impuls-impuls penyusun, maka respon sistem terhadap sinyal x[n] dapat disusun dari respon-respon impuls penyusun, yaitu x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + ... Setelah dilakukan penjumlahan seperti ini diperoleh gambar respon sistem y[n] .

Telah disebutkan bahwa jika respon impuls sebuah sistem diketahui, respon sistem terhadap sembarang sinyal dapat dihitung. Sebuah sistem linier dan time-invariant hanya mempunyai satu respon impuls yang tidak pernah berubah. Jadi hubungan antara sebuah sistem dengan respon impuls adalah berkawan satu-satu. Itulah sebabnya respon impuls dapat digunakan menyatakan sebuah sistem dalam pemodelan seperti terlihat pada gambar di bawah ini.

$$x \longrightarrow \boxed{\;h\;} \longrightarrow y$$

Respon sistem terhadap masukan berupa tangga satuan (*unit step*) disebut respon step. Hubungan antara unit step dengan unit impulse berkawan satu-satu. Sehingga seperti respon impuls, respon step juga dijadikan gambaran sistem. Penggunaan respon step dalam penggambaran sistem banyak dilakukan pada analisis dan desain sistem kontrol. Sedangkan penggunaan respon impuls lebih banyak dilakukan pada analisis dan desain tapis (*filter*).

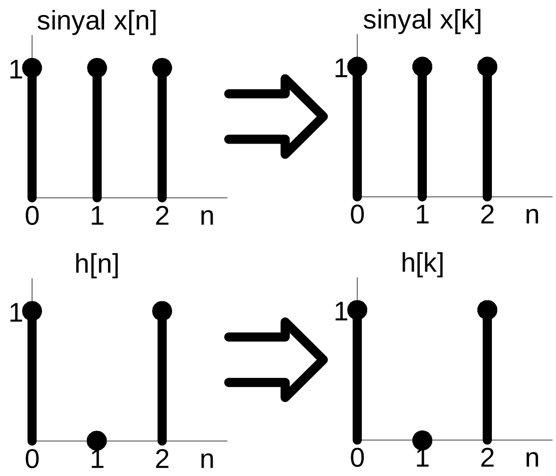
Konvolusi dengan Metode Grafik

Kita akan menghitung konvolusi berdasarkan grafik. Secara umum, cara grafik untuk mendapatkan konvolusi x[n] dan h[n] adalah sebagai berikut:

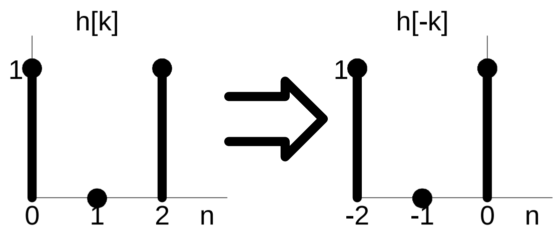
1. Substitusi n=k sehingga didapatkan x[k] dan h[k]
2. Cari nilai h[-k], yaitu dengan cara mencerminkan nilai nilai h[k] terhadap sumbu k=0
3. Geser h[-k] sejauh n ke kanan jika n positif atau ke kiri jika n negatif sehingga didapatkan h[n-k]
4. Kalikan x[k] dengan h[n-k] untuk mendapatkan $v_n[k]=x[k]h[n-k]$
5. Jumlahkan nilai-nilai pada $v_n[k]$, yaitu ….+ $v_n[1]$, $v_n[2]$, $v_n[3]$,+…. untuk mendapatkan y[n]

Dari contoh soal sebelumnya dapat dihitung konvousi dengan metode grafik sebagai berikut

1. Substitusi n=k pada x[n]= $\underset{\uparrow}{1}$ 1 1 dan h[n]= $\underset{\uparrow}{1}$ 0 1 menjadi x[k] dan h[k]



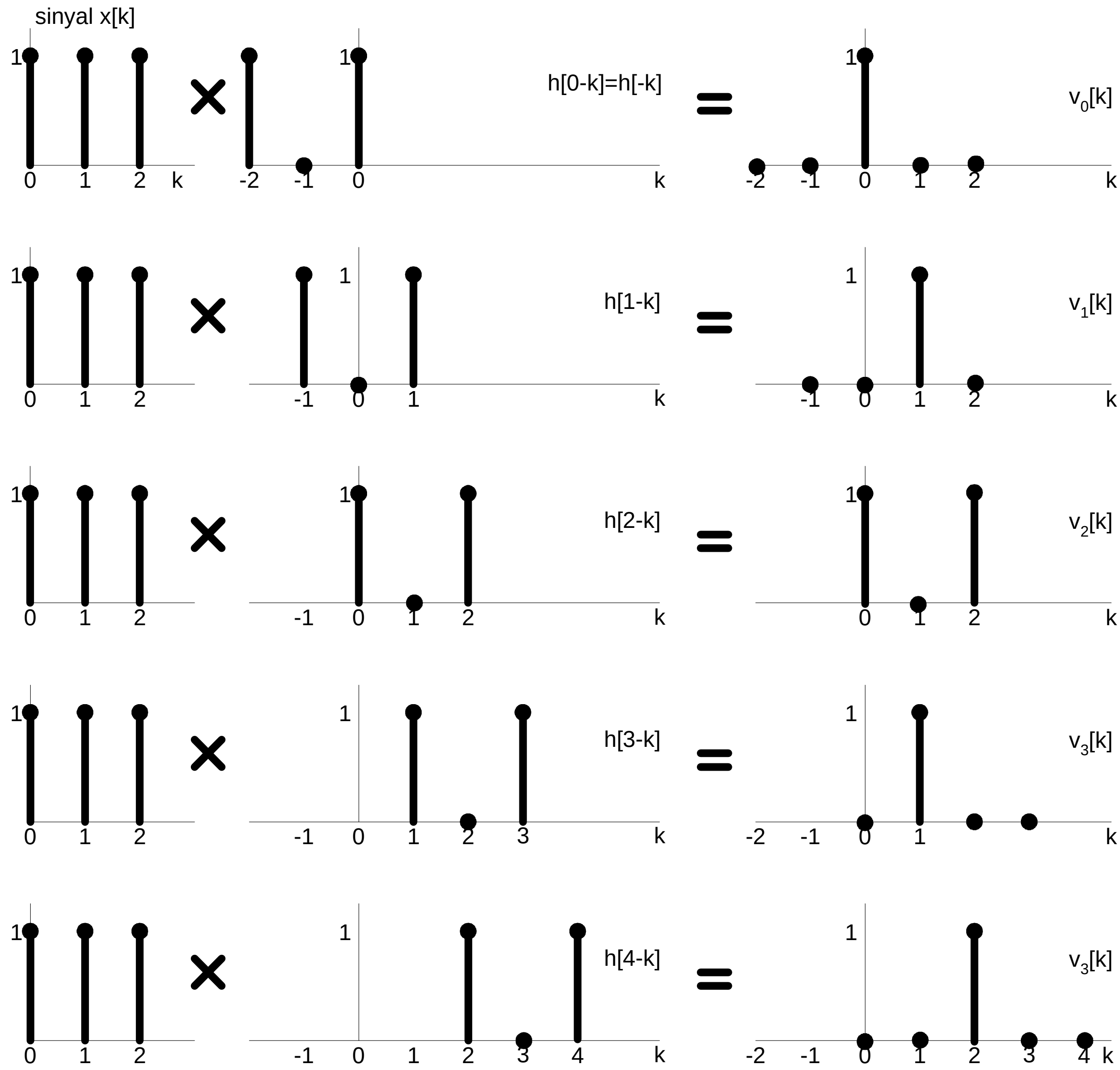
2. Cari nilai h[-k], yaitu dengan cara mencerminkan nilai nilai h[k] terhadap sumbu k=0



4. Kalikan x[k] dengan h[n-k] untuk mendapatkan $v_n[k]=x[k]h[n-k]$, dengan cara geser h[-k] sejauh n, karena nilai x[k] pada soal = 0 untuk k<0 maka y[n]=0 untuk n<0, artinya n dimulai dari n=0. Selanjutnya kalikan h[-k] tergeser dengan x[k] untuk mendapatkan $v_n[k]$
5. y[n] diperoleh dengan menjumlahkan nilai-nilai $v_n[k]$, seperti pada gambar di bawah. Sehingga y[n] adalah $\Sigma\, v_0[k]$, $\Sigma\, v_1[k]$, $\Sigma\, v_2[k]$, $\Sigma\, v_3[k]$, $\Sigma\, v_4[k]$= 1 1 2 1 1

Pada contoh di atas panjang x[n] = 3, panjang h[n] = 3 dan menghasilkan panjang y[n] = 5. Jika panjang x[n] = N , panjang h[n] = M dan panjang y[n] = K maka secara umum berlaku

$$K = N + M - 1$$



Konvolusi dengan Metode Respon Unit Impuls

Selain sifat sifat konvolusi yang telah disebutkan pada pembahasan sebelumnya, terdapat sifat sifat konvolusi lain sebagai berikut:

1. Sifat Identitas: $x[n] \otimes \delta[n] = \delta[n] \otimes x[n] = x[n]$
2. Konvolusi dari unit impuls tergeser: $x[n] \otimes \delta[n-k] = x[n-k]$

Keluaran konvolusi dapat memanfaatkan sifat sifat di atas. Dengan menggunakan metode respon unit impuls ini, akan diperoleh persamaan output/respon sistem yang inputnya bersifat variabel. Dengan persamaan output tersebut, inputnya dapat diubah-ubah sesuai masukannya.

Pada contoh kasus sebelumnya diketahui $x[n]= 1\ 1\ 1$ dan $h[n]=1\ 0\ 1$ dimana $h[n]$ dituliskan sebagai $1\delta[n] +1\delta[n-2]$ maka dapat ditentukan persamaan output/respon sistem sbb

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n]\otimes h[n] \\
&= x[n]\otimes(1\delta[n] +1\delta[n-2])
\end{aligned}
$$

dengan menggunakan sifat konvolusi pada persamaan ( ) diperoleh:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n]\otimes 1\delta[n] + x[n]\otimes 1\delta[n-2] \\
&= x[n] + x[n-2]
\end{aligned}
$$

diketahui $x[n] = 1\ 1\ 1$ sehingga $x[n-2] = 0\ 0\ 1\ 1\ 1$ maka

$$
\begin{aligned}
y[n] &= 1\ 1\ 1 + 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
&= 1\ 1\ 2\ 1\ 1
\end{aligned}
$$