INTEGRAL KONVOLUSI UNTUK MENENTUKAN RESPON SYSTEM LINIER

Oleh: Ir. Sigit Kusmaryanto, M.Eng.
http://sigitkus@ub.ac.id

Jika diketahui respon impuls h(t) dan masukan x(t) maka respon sistem linier dapat direpresentasikan sebagai:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

atau dapat juga dinyatakan:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Kedua rumusan diatas dikenal sebagai integral konvolusi. Untuk dua fungsi sembarang x(t) dan h(t) maka integral konvolusi r(t) dapat dinyatakan sebagai:

r(t) = x(t) * h(t)

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Perhitungan model persamaan diatas dilakukan dengan langkah-langkah:

1. Ganti variable bebas t dengan τ. x(t) → x(τ) dan h(t)→ h(τ)
2. Cerminkan h(τ) menjadi h(-τ) dan digeser sepanjang t sehingga menghasilkan h(t-τ) = h[-(τ-t)], merupakan fungsi τ dengan parameter t
2. x (τ) dan h(t-τ) dikalikan untuk seluruh τ dengan harga t yang tetap.
3. Product x (τ).h(t-τ) diintegrasikan pada seluruh τ untuk mendapatkan sebuah output y(t)
4. Tahap 1 sampai 3 diulang dengan variasi t yang termasuk dalam range konvolusi tsb.

Konvolusi kontinyu mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

a) *Komutatif*

x(t)*y(t) = y(t)*x(t)

$r_{xy}(t) = r_{yx}(t)$

b) *Distributif*

x(t)*[y(t) ± z(t)] = [x(t)*y(t)] ± [x(t)*z(t)]

$r_{xy}(t) = r_{yx}(t) \pm r_{xz}(t)$

c) *Asosiatif*

x(t)*[y(t)*z(t)] = [x(t)*y(t)]*z(t)

Contoh:

Jika diketahui sinyal masukan x(t):

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<1 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Dan respon impuls sistem :

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 1<t<2 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Respon sistem r(t) !

Penyelesaian:

Respon sistem r(t) ditentukan dengan integral konvolusi :

r(t) = x(t) * h(t)

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(p)h(t-p)dp$$

Pada rumus diatas dapat dilihat bahwa untuk mencari nilai r(t) diperlukan sinyal x(τ) dan sinyal h(t- τ).

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<1 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$

maka,

$$x(\tau) = \begin{cases} 1 & 0< \tau <1 \\ 0, & p \text{ lainnya} \end{cases}$$

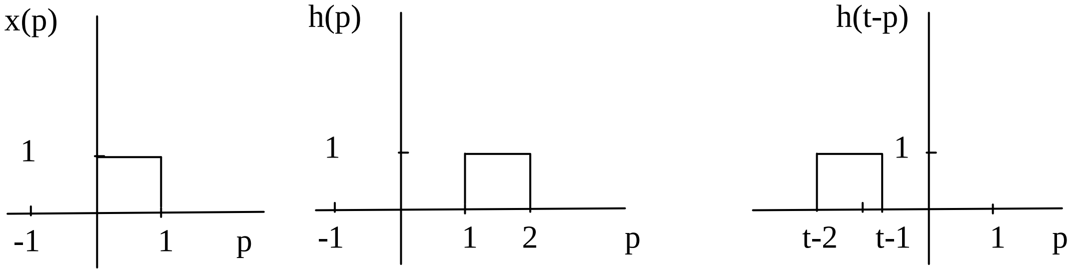
sedangkan h(t- τ) dapat dicari sebagai berikut:

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1 & 1<t-\tau <2 \\ 0, & t-\tau \text{ lainnya} \end{cases}$$

yang dibutuhkan adalah fungsi h dalam p maka:

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1 & -2+t< \tau <-1+t \\ 0, & p \text{ lainnya} \end{cases}$$

Untuk mempermudah diilustrasikan sebagai berikut:

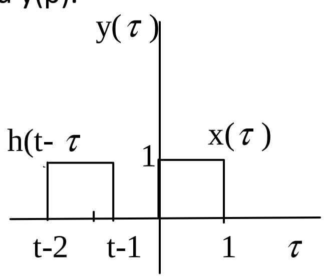


Gambar Sinyal x(τ), h(τ) dan h(t- τ)

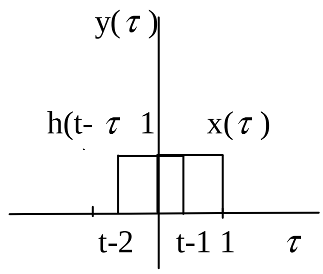
Pada gambar diatas sinyal h(t- τ)=h(-(τ -t)) adalah sinyal h(- τ) yang tergeser sejauh t. Dari rumusan integral konvolusi dapat dilihat bahwa sinyal h(-p) dijalankan dari -∞ sampai +∞. Nilai integral konvolusi dapat dibagi menjadi beberapa kasus penggal waktu t yaitu:

- Pada saat t<1
- Pada saat 1<t<2
- Pada saat 2<t<3
- Pada saat t>3

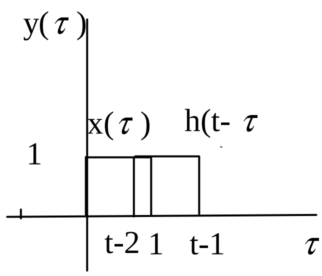
Untuk memperjelas keempat kasus ini x(p) dan h(t-p) digambarkan dalam satu sumbu y(p).



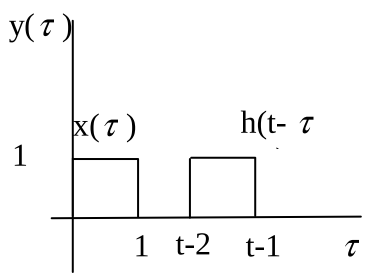
(a)



(b)



(c)



(d)

Gambar **(a) Sinyal x(τ) dan h(t- τ) pada saat t<1**
(b) Sinyal x(τ) dan h(t- τ) pada saat 1<t<2
(c) Sinyal x(τ) dan h(t- τ) pada saat 2<t<3
(d) Sinyal x(τ) dan h(t- τ) pada saat t>3

Hasil konvolusi r(t) pada tiap penggal waktu tersebut adalah sebagai berikut

a) Pada saat t<1

Pada periode ini sinyal h(t- τ) belum sampai ke titik awal x(τ) maka:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

r(t) = 0

b) Pada saat 1<t<2

Pada saat 1<t<2 batasan bawah integral konvolusi berdasar Gambar (b) adalah 0 dengan batas atas t-1.

$$r(t) = \int_{0}^{t-1} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$r(t) = \int_{0}^{t-1} (1)(1)d\tau$$

r(t) = t-1

c) Pada saat 2<t<3

Pada saat 2<t<3 batasan bawah integral konvolusi berdasar Gambar (c) adalah t-2 dengan batas atas 1.

$$r(t) = \int_{t-2}^{1} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$r(t) = \int_{t-2}^{1} (1)(1)d\tau$$

r(t) = 1-(t-2)

= 3-t

d) Pada saat t<3

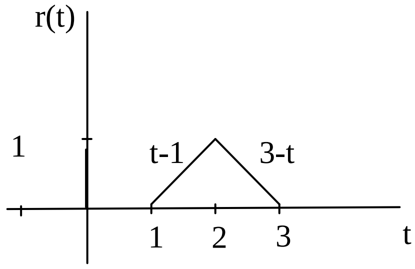
Pada waktu ini h(t-p) sudah meninggalkan batas akhir x(p) sehingga:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

r(t) = 0

Dengan demikian hasil konvolusi secara keseluruhan adalah sebagai berikut:

$$r(t) = \begin{cases} t-1 & 1<t<2 \\ 3-t & 2<t<3 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases}$$



Gambar Sinyal r(t) hasil konvolusi x(t) dan h(t)

Daftar Pustaka :

- Alan V. Oppenheim & A.S Willsky, *Signals and Systems*, 1997
- Alan V. Oppenheim & R.W.Schafer, *Discrete-Time signal Processing*, PHI, 1975.
- Hwei P. Hsu, *Theory and Problems of Signals and Systems,* 1995